Spinory w Algebrze Clifforda

Jak wygląda baza Diraca?

Grupy Spin w różnych wymiarach

Spin(1) = O(1)

Spin(2) = U(1) = SO(2)

Spin(3) = Sp(1) = SU(2)

Spin(4) = Sp(1) × Sp(1)

Spin(5) = Sp(2)

Spin(6) = SU(4)

Spin(1,1) = GL(1,**R**)

Spin(2,1) = SL(2,**R**)

Spin(3,1) = SL(2,**C**)

Spin(2,2) = SL(2,**R**) × SL(2,**R**)

Spin(4,1) = Sp(1,1)

Spin(3,2) = Sp(4,**R**)

Spin(5,1) = SL(2,**H**)

Spin(4,2) = SU(2,2)

Spin(3,3) = SL(4,**R**)

Algebra Clifforda

Algebra wolna generowana przez wektory przestrzeni metrycznej (np. Minkowskiego) podzielona przez relację: $aa=g(a,a)$

Często przyjmuje się równoważny warunek: $ab+ba=2\,g(a,b)$

$(a+b)(a+b)=g(a+b,a+b)$

$aa+ab+ba+bb=g(a,a)+g(a,b)+g(b,a)+g(b,b)$

$ab+ba=2\,g(a,b)$

Baza Algebry Clifforda

- 1 (skalary)
- Ei (wektory)
- Ei Ej (rotacje)
- Ei Ej Ek (w D=4 pseudowektory)
- Ei Ej Ek El (w D=4 pseudoakalary)
- ….. (iloczyn maksymalnie D wektorów)

Dwie definicje grupy Spin

- Podwójnie nakrywająca grupa dla grupy ortogonalnej SO(N) lub SO(p,q)

- Grupa iloczynów parzystej ilości wektorów jednostkowych (+ -) (dopuszczalna jest parzysta ilość wektorów o normie -1)
- Element odwrotny: te same wektory w odwrotnej kolejności.

Szukanie reprezentacji

Dla każdej grupy Spin inaczej.

- Elementy Grupy Spin leżą w algebrze Clifforda
- Algebra Clifforda jest reprezentacją grupy Spin (zwykle redukowalną)
- Podobnie jej kompleksyfikacja.
- Jak znaleźć reprezentacje nieredukowalne ?

Minimalne lewe Moduły

- Działanie grupy Spin na algebrę Clifforda A definiujemy przez mnożenie z lewej strony.
- Dla dowolnego elementu ω zbiór elementów postaci **a**ω nazywamy lewym modułem. (**a** należy do algebry Clifforda)
- Moduł jest minimalny jeśli nie zawiera podmodułów.
- Minimalny moduł jest reprezentacją nieredukowalną algebry Clifforda i reprezentacją grupy Spin (najczęściej redukowalną)

Elementy nilpotentne i idempotentne

- Dobrymi kandydatami na ω są elementy nilpotentene ($\omega\omega=0$)
  oraz
  idempotentne($\omega\omega=\omega$)
- Rozpatrując iloczyn **a**ω
- W pierwszym przypadku gdy **a**=ω można efektywnie przyjąć **a**=0
- W drugim przypadku gdy **a**=ω można efektywnie przyjąć **a**=1

Baza Diraca

- W tej bazie diagonalne są: iloczyn $\gamma 1\ \gamma 2$ oraz $\gamma 0$
- Szukamy pierwszego elementu bazy $\omega=(1\ 0\ 0\ 0)$. Z niego otrzymamy pozostałe.
- $\gamma 0\ \omega=\omega$ oraz $\iota\gamma 1\gamma 2\omega=\omega$
- Otrzymujemy $\omega=(1+\iota\gamma 1\gamma 2)(1+\gamma 0)$
- W jest iloczynem dwóch niezależnych elementów idempotentnych (operatorów rzutowych).

Baza Diraca cd

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $(1\ 0\ 0\ 0) = \omega$
- $(0\ 0\ 0\ 1) = -\gamma 1\ (1\ 0\ 0\ 0) = -\gamma 1 \omega$
- $(0\ 0\ 1\ 0) = -\gamma 3\ (1\ 0\ 0\ 0) = -\gamma 3 \omega$
- $(0\ 1\ 0\ 0) = -\gamma 3\ (0\ 0\ 0\ 1) = \gamma 3 \gamma 1 \omega$

Baza Weyla

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

- W tej bazie diagonalne są iloczyny: $\gamma 0 \gamma 3$ oraz $\gamma 1 \gamma 2$
- ω konstruujemy z operatorów rzutowych $\omega = (1\ 0\ 0\ 0)$

  $\omega = (1 + \iota\gamma 1\gamma 2)(1 + \gamma 0\gamma 3) = (1 + \iota\gamma 1\gamma 2)(1 + \iota\gamma 0\gamma 1\gamma 2\gamma 3)$
- Podobnie jak poprzednio

Baza Weyla cd

- Ponieważ $\gamma 1$ i $\gamma 3$ są w tej bazie takie jak w bazie Diraca więc bez zmian pozostaje konstrukcja pozostałych wektorów bazowych:
- $(1\ 0\ 0\ 0) = \omega$
- $(0\ 0\ 0\ 1) = -\gamma 1\ (1\ 0\ 0\ 0) = -\gamma 1 \omega$
- $(0\ 0\ 1\ 0) = -\gamma 3\ (1\ 0\ 0\ 0) = -\gamma 3 \omega$
- $(0\ 1\ 0\ 0) = -\gamma 3\ (0\ 0\ 0\ 1) = \gamma 3 \gamma 1 \omega$

Baza Majorany

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

- Diagonalne są $\gamma 1$ oraz iloczyn $\gamma 0 \gamma 2$ zatem:
- $(1\ 0\ 0\ 0) = \omega = (1 - \imath\gamma 1)(1 + \gamma 0 \gamma 2)$
- $(0\ 1\ 0\ 0) = \imath\gamma 3\ (1\ 0\ 0\ 0) = \imath\gamma 3 \omega$
- $(0\ 0\ 0\ 1) = -\imath\gamma 0\ (1\ 0\ 0\ 0) = -\imath\gamma 0 \omega$
- $(0\ 0\ 1\ 0) = \imath\gamma 3\ (0\ 0\ 0\ 1) = \gamma 3 \gamma 0 \omega$

Pomysł

- W każdym przypadku można ω pomnożyć z prawej strony przez dowolny (odwracalny) element algebry Clifforda x.
- Dla niektórych x otrzymamy inny lewy moduł.
- Czy można traktować x jako symetrię lokalną i uczynić z niego pole cechowania?

Baza Weyla raz jeszcze

$\omega = (1+\iota\,\gamma 1\gamma 2)(1 + \iota\,\gamma 0\gamma 1\gamma 2\gamma 3)$

$\omega' = \omega x = (1+\iota\gamma 1\gamma 2)(1+\gamma 5)\, x$

- Ile jest istotnie różnych ω' ?
- Jak jest symetria ?
- Rozpatrzmy symetrie ciągłe (x parzyste)
- Jeśli w x występuje $\gamma 0$ możemy się go pozbyć.
- Jeśli w x występuje $\gamma 2$ możemy się go pozbyć.
- Otrzymujemy symetrię SU2 ?? U1 ??

Problemy

- Czy to jest faktycznie SU2?
- Czy istnieją jeszcze inne symetrie?
- Np. dołączone działanie algebry Clifforda na grupie Spin?
- Czy ma to jakiś związek z polami cechowania modelu standardowego?
- Czy może być pomocne w formułowaniu teorii pola na zakrzywionej czasoprzestrzeni?